Serie 1: Faktorzerlegung

Ausklammern:

$$ax^2 - ay^2 = a\left(x^2 - y^2\right) = a(x+y)(x-y)$$

$$a^3bx^2 + a^2b^5y - a^4bz = a^2b \cdot \left(ax^2 + b^4y - a^2z\right)$$

$$x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = (a+b)(x+y+z)$$

Erste binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zweite binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dritte binomische Formel

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Klammer · Klammer: $x^2 + 8xy + 15y^2 = (x+3y)\cdot(x+5y)$

Serie 2: Division, Kürzen

Beispiel: $\dfrac{a}{b} : x = \dfrac{a}{b} : \dfrac{x}{1} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{bx}$

Summen und Differenzen dürfen nicht gekürzt werden

Beispiele: $\dfrac{2+1}{1+1} \neq \dfrac{2}{1}$ $\qquad \dfrac{10+x^2}{5+x} \neq \dfrac{2+x}{1+1}$

Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen. Erst dann darf gekürzt werden.

Beispiel: $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$

Eventuell Vorzeichen anpassen

Beispiel: $\dfrac{y-2x}{2x-y} = \dfrac{-(2x-y)}{2x-y} = -1$

Eventuell Bruch mit (–1) erweitern (Vorzeichen ändern)

Beispiel: $\dfrac{-a-b+c}{1-x-y} = \dfrac{(-1)\cdot(-a-b+c)}{(-1)\cdot(1-x-y)} = \dfrac{a+b-c}{x+y-1}$

Serie 2: Lineare Gleichungen

Vgl. Serie 4. Gleiches Vorgehen ab Schritt 4.

Serie 3: Bruchterme

Das kgV bestimmen

- Zahlen oder Terme so weit wie möglich in Faktoren zerlegen
- Bei Termen kann jeder Faktor mit einer Primzahl verglichen werden (kann nicht weiter zerlegt werden)

Beispiel 1: das kgV von $3 \cdot 5$ und $5 \cdot 7$ ist $3 \cdot 5 \cdot 7$

Beispiel 2: das kgV von $3 \cdot 5^3$ und $5^2 \cdot 7^2$ ist $3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

Beispiel 3: das kgV von $2^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6$ und $3^5 \cdot 5 \cdot 7^8$ ist $2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^8$

Beispiel 4: das kgV von $3 \cdot 5 \cdot x \cdot (x-1)^3$ und $3^2 \cdot x^3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

ist $3^2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+1)$

Bruch ± Bruch

- Brüche gleichnamig machen (kgV)

Beispiel 1: $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$

Beispiel 2:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{x-3}{1-x^2} \qquad \text{Vorzeichen anpassen}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{(-1)(x-3)}{(-1)(1-x^2)}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3-x}{x^2-1} \qquad \text{Nenner faktorisieren}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3-x}{(x+1)(x-1)} \qquad \text{Gleichnamig machen}$$

$$=\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{3-x}{(x+1)(x-1)} \qquad \text{Brüche addieren}$$

$$=\frac{(x+1)+(2x-2)-(3-x)}{(x+1)(x-1)} \qquad \text{Bruch vereinfachen}$$

$$=\frac{4x-4}{(x+1)(x-1)}=\frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{4}{x+1}$$

Bruch · Bruch

- (Zähler mal Zähler) : (Nenner mal Nenner)
- Faktoren (insbesondere im Nenner) nicht zu früh ausmultiplizieren. Solange man Faktoren hat besteht die Chance zum Kürzen.

Beispiel: $\frac{a+b}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{a}=\frac{a+b}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{a}=\frac{2(a+b)(x+1)}{(x+1)\cdot a}=\frac{2(a+b)}{a}$

Bruch : Bruch

- Mit dem Kehrwert multiplizieren: $\frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx}$

Begründung: $\frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx}$

Terme und Brüche

- Aus einem Term kann man einen Bruch machen: $Term=\frac{Term}{1}$

Beispiel: $x+\frac{y}{x+y}=\frac{x}{1}+\frac{y}{x+y}=\frac{x\cdot(x+y)}{x+y}+\frac{y}{x+y}=\frac{x^2+xy+y}{x+y}$

Serie 4: Gleichungen mit Bruchtermen

1. Nenner faktorisieren und kgV aller Nenner bestimmen
2. Brüche gleichnamig machen und addieren $\rightarrow$ $\frac{Term_1}{kgV}=\frac{Term_2}{kgV}$

   (Dieser Schritt kann übersprungen werden)
3. Gleichung mit dem kgV multiplizieren $\rightarrow$ $Term_1=Term_2$

Lineare Gleichungen ohne Bruchterme:

4. Klammern auflösen (jedenfalls wenn x in der Klammer steht)
5. Terme, die x enthalten auf die linke Seite, übrige Terme auf die rechte Seite

   Beispiel: $ax-bx=c$
6. x ausklammern $x\cdot(a-b)=c$
7. Dividieren: $x=\frac{c}{a-b}$
8. Lösung überprüfen

Serie 5: Lineare Gleichungssysteme

- Eine lineare Gleichung $ax + by = c$ kann in die Form $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$ gebracht werden. Alle Lösungen $(x ; y)$ entsprechen also den Punkten auf einer Geraden.
- Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten entspricht dem Schnittpunkt der entsprechenden Geraden. Die gegenseitige Lage dieser Geraden gibt Auskunft über die Anzahl Lösungen des Gleichungssystems.

Die Geraden …	Das Gleichungssystem …
schneiden sich	hat genau eine Lösung
sind parallel	hat keine Lösung
sind identisch	unendlich viele Lösungen

- Es gibt verschiedene Lösungsmethoden. Oft ist das Additionsverfahren besonders geeignet (keine Umwege, keine Brüche).

Das Additionsverfahren

1. Gleichungen in die Form $ax + by = c$ bringen

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 3x + 7y = 32 \\ \mathrm{II} & 2x - 8y = -42 \end{array}$$

2. Bei x (oder bei y) „angleichen“

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot \mathrm{I} & 6x + 14y = 64 \\ 3 \cdot \mathrm{II} & 6x - 24y = -126 \end{array}$$

3. Gleichungen addieren oder subtrahieren

$$2 \cdot \mathrm{I} - 3 \cdot \mathrm{II} \qquad (6x + 14y) - (6x - 24y) = 64 - (-126)$$
$$38y = 190$$
$$y = 5$$

4. $y = 5$ einsetzen

$$y \text{ in } \mathrm{I} \qquad 3x + 35 = 32$$
$$3x = -3$$
$$x = -1$$

Serie 6: Potenzen

	Produkt	Quotient
Gleiche Basen	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Gleiche Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Weitere **Gesetze**	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a^0 = 1$ & $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ & $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Quadratische Gleichungen

Beispiele ohne Lösungsformel:

1. $x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 3$
2. $x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 5$
3. $2x^2 + 5x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-3)(x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -4$

Lösungsformel: $ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Beispiel:

1. $x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad b = -3 \quad c = -10$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3-7}{2} - 2 \quad x_2 = \frac{3+7}{2} = 5$$

Serie 7: Funktionen

Wird im Grundlagenfach behandelt.