La trigonométrie - triangles rectangles (rechtwinklig)

Du mot grecque
trigonon = le triangle

metria = mesurer

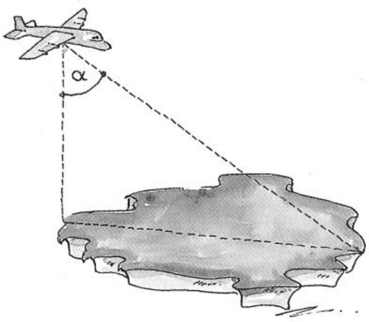
Le but c'est le calcul de la longueur des côtés (le côté) et la grandeur des angles (Winkel) d'un triangle

le côté
un angle

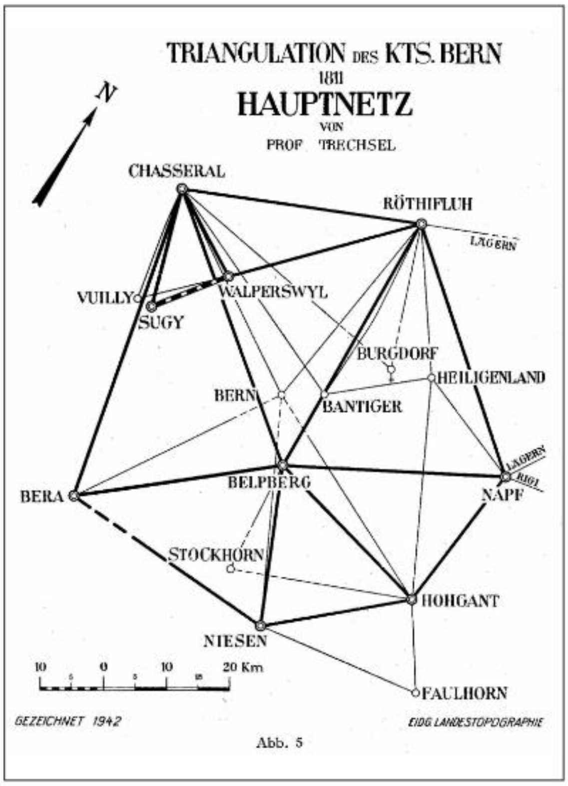
(la vue du sommet du Niesen sur le lac de Thoune)

Applications de la trigonométrie

- mesurer des distances



- La triangulation: fabrication d'une carte géographique en mesurant et calculant les distances horizontales et verticales



- En navigation : déterminer la position
- En astronomie : mesurer la distance entre les planètes, modéliser le chemin des planètes

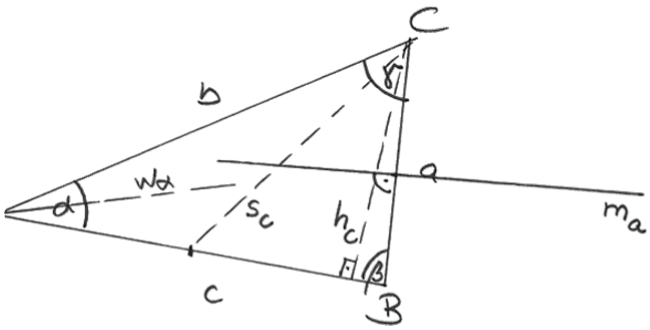
Les autres champs où la trigonométrie intervient sont: physique (électricité, électronique, mécanique, acoustique, optique), statistiques, économie, biologie, chimie, médecine, météorologie, cryptographie, etc.

Bezeichnungen : Notions dans le triangle

Il y a plusieurs types de triangles particuliers

triangle rectangle (avec un angle droit) ***.. équilatéral*** (gleichseitig) ***..isocèle*** ***.. quelconques***

Quelques lignes spécifiques dans un triangle.



la bissectrice divise l'angle en deux parties égales. L'intersection des bissectrices donne le centre du ***cercle inscrit*** (Inkreis)

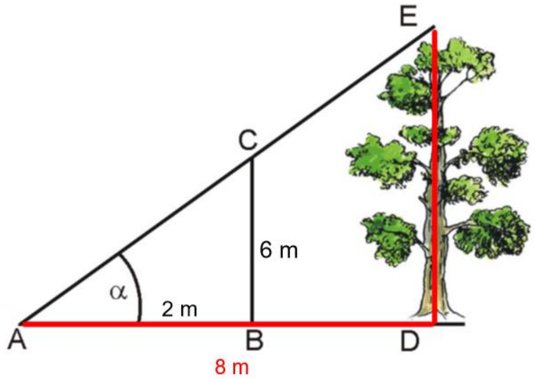
la médiane divise le côté opposé en deux segments identiques. L'intersection donne ***le centre de gravité*** (Schwerpunkt)

la médiatrice est verticale sur ***le point milieu*** (Mittelpunkt) d'un côté du triangle

la hauteur segment vertical entre un sommet (Eckpunkt) du triangle et le côté opposé

Exercice

- Calcule la hauteur de l'arbre
- Esquisse (skizziere) un triangle rectangle avec un angle de 30 et compare-le avec celui de ton voisin.



Tous les triangles semblables (ähnlich) ont

- des angles identiques
- le même rapport des côtés (Seitenverhältnis) à cause de la proportionalité (Strahlensätze)
- une forme identique, mais la taille (Grösse) peut être différente

Si un angle d'un triangle rectangle est donné, alors les trois angles sont donnés et on peut dessiner des triangles semblables. Ainsi le rapport des côtés est bien déterminé.

Dans les triangles rectangles il y a un lien entre le rapport des côtés et un seul angle donné.

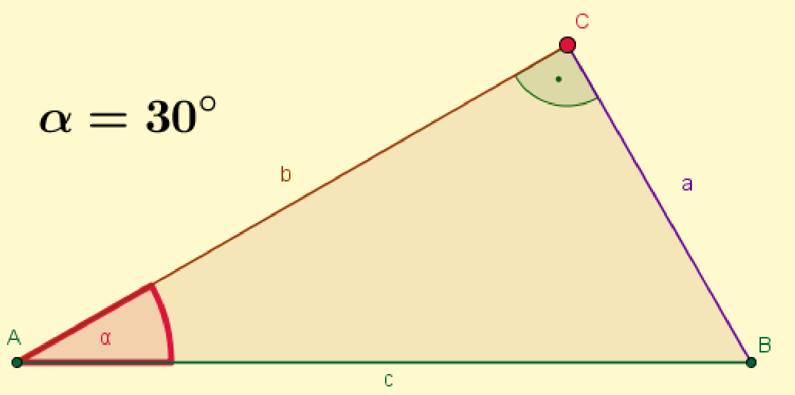
Définitions des rapports de côtés dans un triangle rectangle

Voici un triangle rectangle avec $\alpha = 30$ En vue d'un angle α du triangle on peut préciser le nom des côtés d'un triangle rectangle.

H := ***l'hypoténuse*** (opposé à l'angle droit, le côté plus long)

O := ***côté opposé*** à l'angle α ; Gegenkathete)

A := ***côté adjacent*** (Ankathete)



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \frac{4}{8} = 0.5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \frac{6.93}{8} = 0.87$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} = \frac{4}{6.93} = 0.58$$

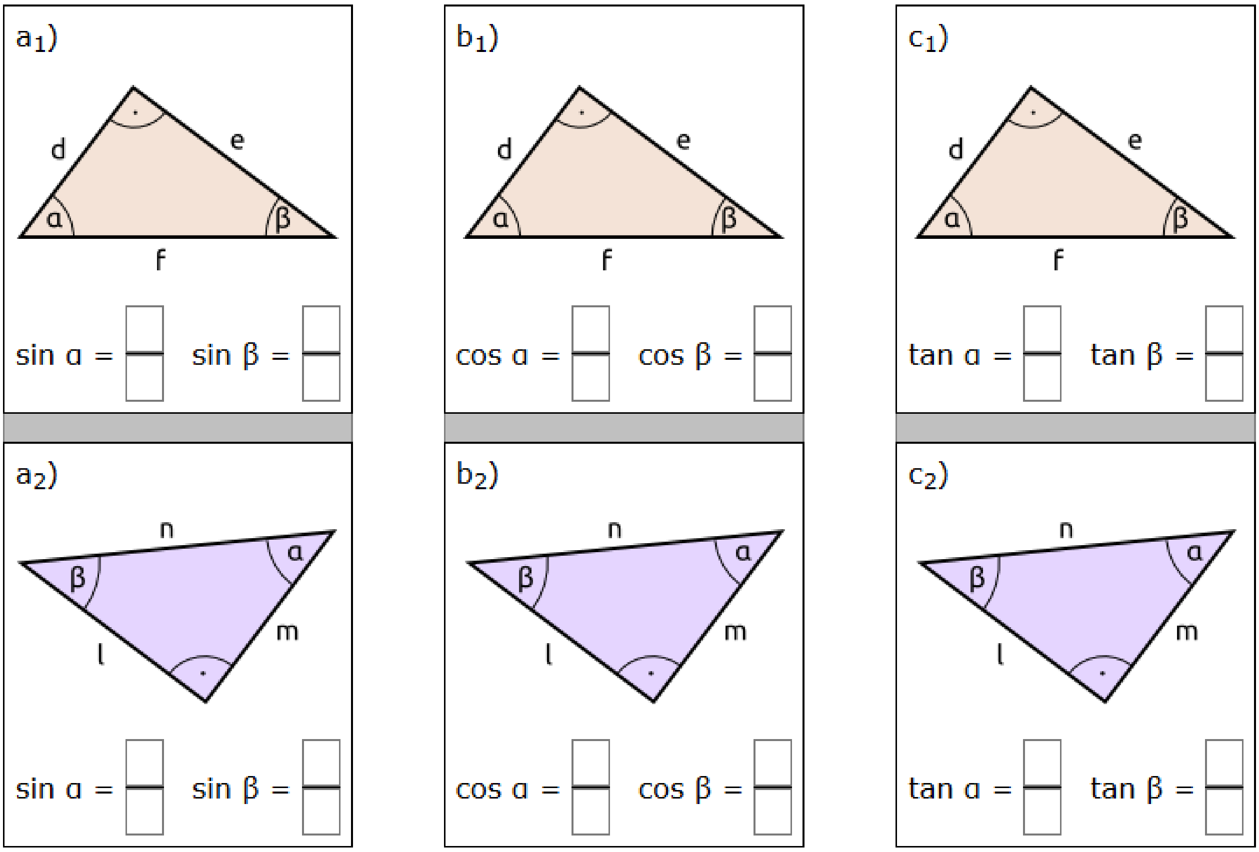
Pour différencier les rapports des côtés on va les nommer

$$\sin(\alpha) = \frac{O}{H}$$

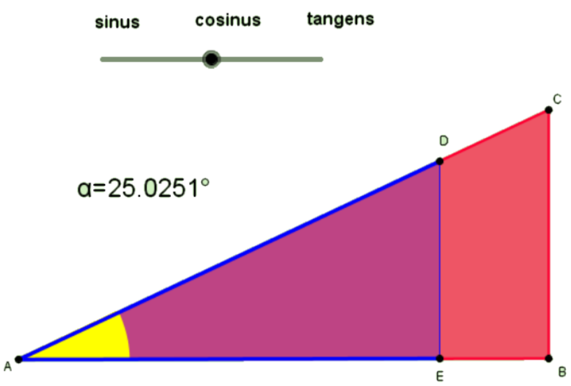
$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{O}{A}$$

Exercice



Ces trois rapports des côtés dans un triangle rectangle dépendent seulement d'un seul angle.



$$\Delta ABC : Cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{7.2582}{8.0102} = 0.9061$$

$$\Delta ADE : Cos(\alpha) = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{5.7712}{6.3691} = 0.9061$$

Pour chaque rapport on reçoit un angle et vice versa. Ainsi on est en présence d'une fonction. Les fonctions trigonométriques, notés ***sinus, cosinus, tangente***, abrégées ***sin, cos, tan***.

Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks	Funktion $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ Umkehrfunktion	Seitenverhältnis, Verhältniszahl

Chaque calculatrice possède des touches permettant d'évaluer les fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

Angle du triangle rectangle	Funktion $\xrightarrow{\quad}$ $\xleftarrow{\quad}$ Umkehrfunktion	Seitenverhältnis, Verhältniszahl
30°	$\sin(30°)$ $\xrightarrow{\quad}$ $\xleftarrow{\quad}$ $\sin^{-1}\left(\frac{6}{12}\right)$	$\frac{O}{H} = 0.5$
	$\cos(30°)$ $\xrightarrow{\quad}$ $\xleftarrow{\quad}$ $\cos^{-1}(0.87)$	$\frac{A}{H} \approx 0.87$
	$\tan(30°)$ $\xrightarrow{\quad}$ $\xleftarrow{\quad}$ $\tan^{-1}(0.58)$	$\frac{O}{A} \approx 0.58$

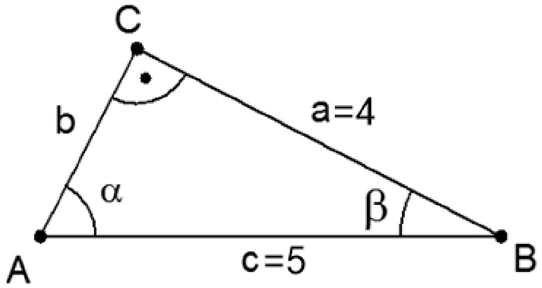
Exercices Compléter le tableau

Angle		Rapport des côtés
45°	$\sin(45°)$ $\xrightarrow{\quad}$	$\sin(45) = \frac{O}{H} =$
60°	$\cos(60°)$ $\xrightarrow{\quad}$	$\cos(60) = \frac{A}{H} =$
	$\xleftarrow{\quad}$ $\sin^{-1}(0.4)$	$\frac{O}{H} = \frac{2}{5} = 0.4$
	$\xleftarrow{\quad}$ $\cos^{-1}(0.3)$	$\frac{A}{H} = \frac{3}{10} = 0.3$
25°	$\tan(25°)$ $\xrightarrow{\quad}$	$\frac{O}{A} =$

	$\xleftarrow{\ \ldots\ldots\ }$	$\frac{A}{H} = 0.65$
	$\xleftarrow{\tan^{-1}(0.3)}$	$\frac{\ldots}{\ldots} = 0.3$
$15°$	$\xrightarrow{\cos(15°)}$	$\frac{\ldots}{\ldots} =$

L'angle α = ?	Le rapport des côtés
$\alpha = \cos^{-1}(0.3) \approx 72.5$	$\cos(\alpha) = \frac{A}{H} = 0.3$
$\alpha = \tan^{-1}(2.2) \approx$	$\tan(\alpha) = \frac{O}{A} = 2.2$
$30°$	cos(30)= ….=
α	sin(α)= ….. = 0.4
$20°$	$\ldots(\alpha) = \frac{O}{H} = \ldots$
	$\ldots(\alpha) = \frac{A}{H} = 0.7$
$\tan(40) = \frac{3}{A}$	$A = \frac{3}{\tan(40)} \approx$
$\cos(20) = \frac{4}{H}$	H=
$\sin(70) = \frac{O}{5}$	O=

- Calcule α , β et b

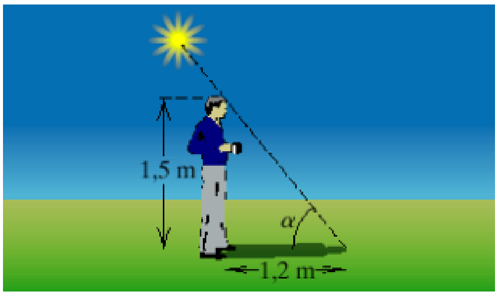


$$\sin(\alpha) = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx$$

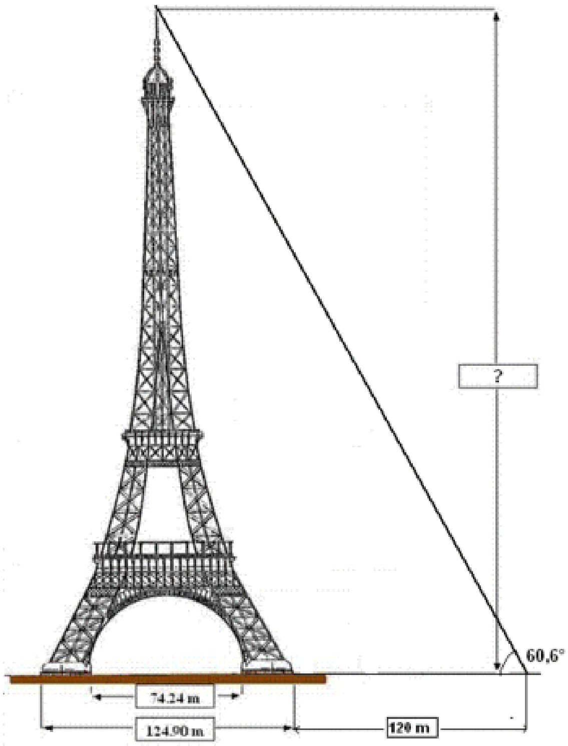
$$\cos(\beta) = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{5} \quad \Rightarrow \quad b = 5 \cdot \cos(\alpha) \approx$$

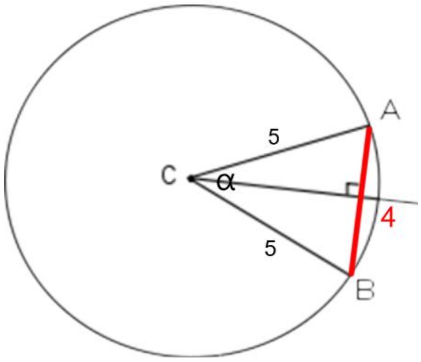
- Calculer l'angle d'élévation α du soleil, si une personne haute de 1.5 m projette une ombre de 1.2 m de long sur le sol (voir figure). (51.34°)



- Calcule la hauteur de la tour Eiffel (323.8 m).

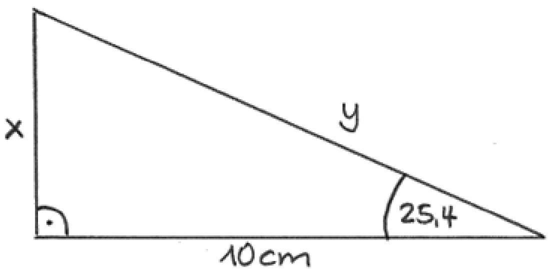


- Voici un cercle de rayon 5 m. Calcule α



Exercices

Détermine le côté x et le côté y.



$$\tan(25.4) = \frac{x}{10}$$

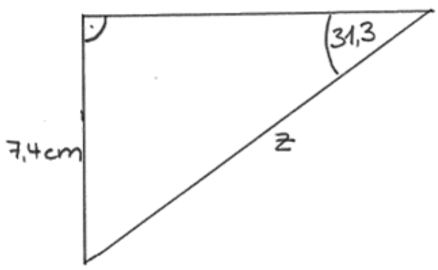
$$x = 10 \cdot \tan(25.4) \approx \underline{\underline{4.75\,cm}}$$

$$\cos(25.4) = \frac{10}{y}$$

$$y \cdot \cos(25.4) = 10$$

$$y = \frac{10}{\cos(25.4)} \approx \underline{\underline{11.07\,cm}}$$

Détermine le côté z.

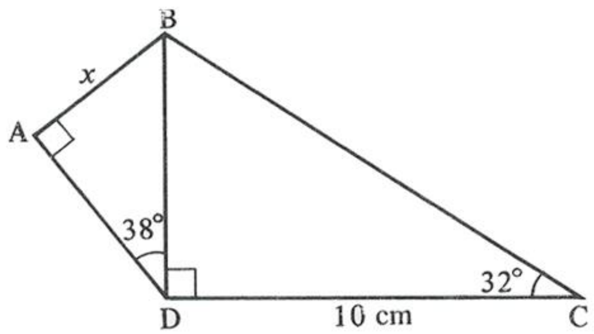


$$\sin(31.3) = \frac{7.4}{z}$$

$$z \cdot \sin(31.3) = 7.4$$

$$z = \frac{7.4}{\sin(31.3)} \approx \underline{\underline{14.24\,cm}}$$

Détermine le côté x.



Solution : x $\approx$3.85cm