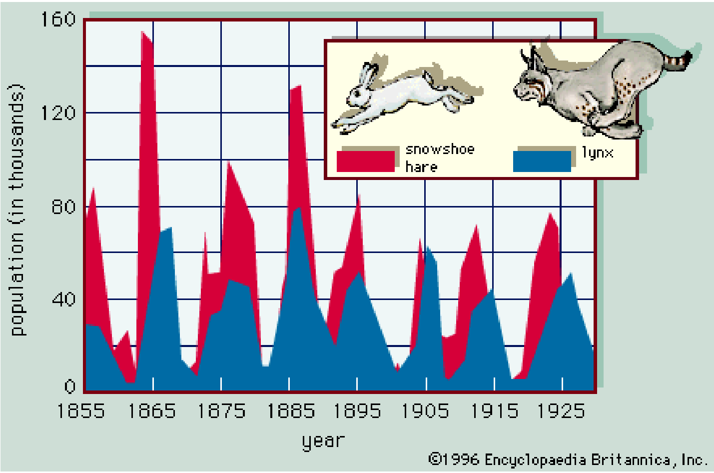
Systèmes dynamiques à 2 variables

Modèles sont toujours une simplification de la réalité et devront aider à voir un processus sous une perspective globale. On aimerait bien développer des méthodes pour analyser la dynamique d'un système à 2 équations différentielles, par exemple un modèle proie-prédateur. Un modèle proie-prédateur, est un modèle où l'on considère deux espèces dont l'une est dégustée par l'autre. Pour modéliser une population de renards et de lapins qui sont en interaction, il faudra introduire un système à 2 équations différentielles.

Modèle proie-prédateur



Voici des données récoltées par la compagnie de la Baie d'Hudson au Canada, une société collectant les fourrures des animaux chassés par les trappeurs. On représente le nombre de fourrures de lapins et de lynx récoltés. Si on suppose que le nombre d'animaux attrapés est proportionnel à l'effectif total de la population alors ce graphe rend compte des variations des populations de lynx et de lapins.

On remarque des fluctuations cycliques des populations et un décalage de phase de populations des deux espèces. De telles fluctuations ont été retrouvées dans d'autres systèmes proies-prédateurs (renard ou chouette / campagnols par exemple).

Construisons un modèle proie-prédateur des plus simples. Dans ce modèle, les proies n'ont qu'un prédateur et on considère qu'il n'y a pas de problème de nourriture pour les proies. On appelle L(t) l'effectif de la population des proies (=lapins) et R(t) l'effectif de la population des prédateurs (renards).

$$L'(t) = a \cdot L(t)$$

Observons tout d'abord l'évolution de l'effectif de la population des proies. Supposons un instant qu'il n'y ait pas de prédateur, et que nos amis les rongeurs gambadent gentiment à travers la campagne en toute quiétude, en s'en mettant plein la panse de carottes et de céleris. L'évolution de l'effectif de la population de proies serait alors uniquement proportionnelle au nombre de proies présentes à l'instant t.

Maintenant l'interaction entre les proies et les prédateurs conduit à une diminution de l'effectif de la population des lapins. Cette diminution est proportionnelle au nombre de rencontres entre les proies et les prédateurs et donc proportionnelle au produit du nombre de prédateurs par le nombre de proies. Le paramètre positif c mesure en quelque sorte l'efficacité avec laquelle les prédateurs chassent les proies.

$$L'(t) = a \cdot L(t) - c \cdot L(t) \cdot R(t)$$

Il faut maintenant déterminer l'évolution de la population des prédateurs R(t). Les prédateurs survivent uniquement grâce à leur interaction avec les proies. L'interaction entre les proies et les prédateurs amène une augmentation de la population des prédateurs. Cette augmentation est proportionnelle au nombre de rencontres entre les proies et les prédateurs et donc proportionnelle au produit du nombre de prédateurs par le nombre de proies. Contrairement aux proies, on suppose que les prédateurs ne peuvent survivre sans les proies et que sans proie, la vitesse de diminution de l'effectif de leur population serait proportionnelle à leur effectif, exprimé par le paramètre k. On a donc une décroissance exponentielle.

$$R'(t) = d \cdot L(t) \cdot R(t) - k \cdot R(t)$$

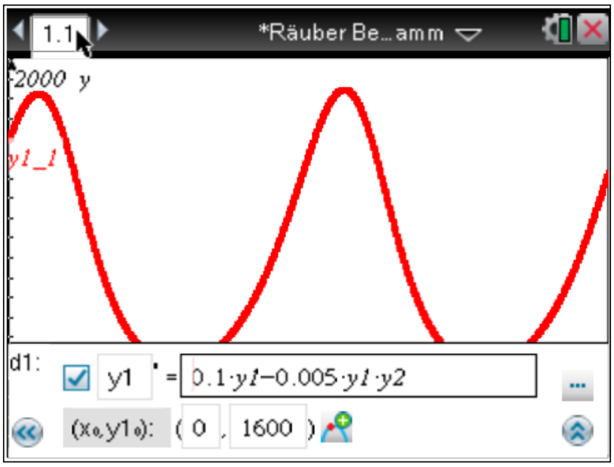
Exemple concret

Voilà le modèle avec des paramètres concrets. Représentation pour 0<t<200 mois

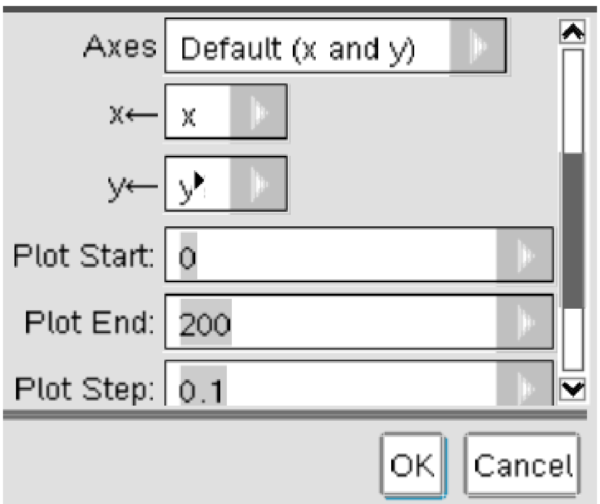
L=lapins, R=renards, L(0)=1600, R(0)=15, t= mois, précision $\Delta t = 0.1$

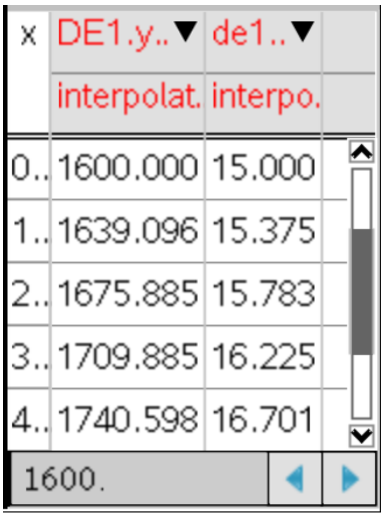
a=0.1, b=0.005, c=0.00004, d=0.04

$L' = a \cdot L - b \cdot L \cdot R$	$y1' = 0.1 \cdot y1 - 0.005 \cdot y1 \cdot y2$	$y1(0) = 1600$
$R' = c \cdot L \cdot R - d \cdot R$	$y2' = 0.00004 \cdot y1 \cdot y2 - 0.04 \cdot y2$	$y2(0) = 15$



Mais pour la représentation graphique il y a un petit problème….

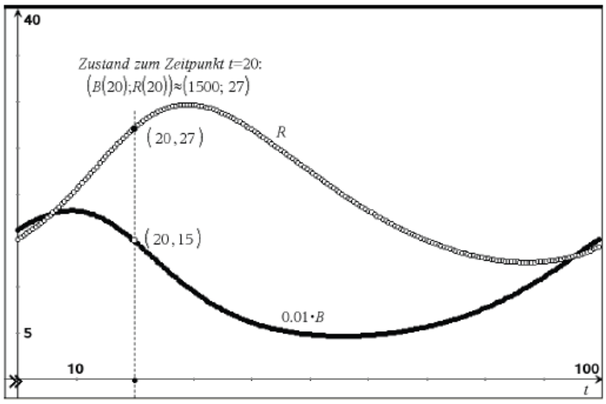




Voici la représentation du développement des deux populations avec l'état initial (y1=1600 lapins / y2=15 renards) pour 100 années.

y1(t)= lapins

y2(t)=renards



Pour représenter le développement à long terme c'est mieux de changer la représentation :
L'axe- x = lapins y1(t)

L'axe-y = renards y2(t)

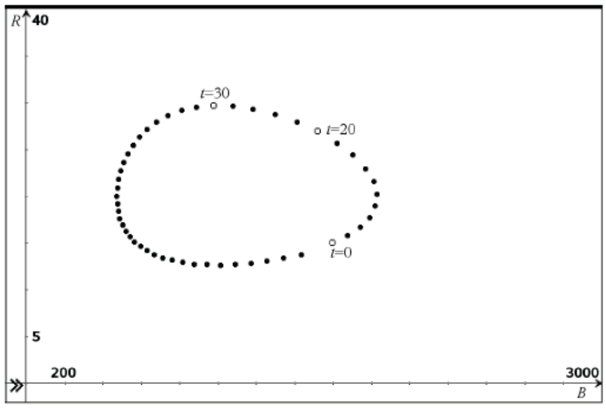
Pour chaque moment t existent une certaine quantité de lapins et de renards, représente par un point dans l'espace des états.

P_t (y1(t) / y2(t))

Par exemple

$t=0 \quad y1=1600 \quad y2=15 \quad P(1600/15)$

$t=20 \quad y1\approx 1523 \quad y2\approx 26 \quad P(1523/26)$



Chaque point de l'espace des états correspond à un état spécifique du système. L'espace des états représente l'ensemble de toutes les situations possibles du système.

Si on change les conditions initiales L(0) et R(0) et on représente le développement on aura une autre trajectoire.

Ici les trajectoires sont fermées, alors il y a des variations cycliques. C'est-à-dire que les populations varient de manière régulière pendant une certaine durée.