L'équation d'une droite dans l'espace

Le système radar (0/0/0) mesure la position P(x/y/z) d'un avion dans un système de coordonnées. Les unités de distance sont représentées en kilomètres, le temps t est mesuré en minutes. Le plan-xy représente le sol, la coordonnée-z correspond alors à l'altitude de vol.

Ce radar localise un avion au moment t=0 à la position P_0 (8 / 13 / 3). Une minute plus tard l'avion se trouve au point P_1 (9 / 11/ 7). L'avion vole avec une vitesse constante et son plan de vol est une droite.

a) Indique le déplacement par minute avec un vecteur.

b) A quelle position l'avion est-il après 1, 2, 3,… t minutes?

temps	position
t=0	P_0 (8 / 13 / 3)
t=1	P_1 (9 / 11 / 7)
t=2	
t=3	
t=20	
Après t minutes	point général P_t (8+t / …….. / ……..)

c) Quelle est la vitesse de l'avion ?

d) L'avion quitte l'espace aérien surveillée par le radar s'il passe par le plan-xz. A bout de combien de minutes franchit-il ce plan ? Quelle est la position exacte à ce moment-là ?

e) Supposons que la position d'une montgolfière est indiquée par S(14/1/8). La vitesse de la montgolfière est négligeable par rapport à la vitesse de l'avion, alors S reste fixe. Est-ce qu'il y a un risque de collision ?

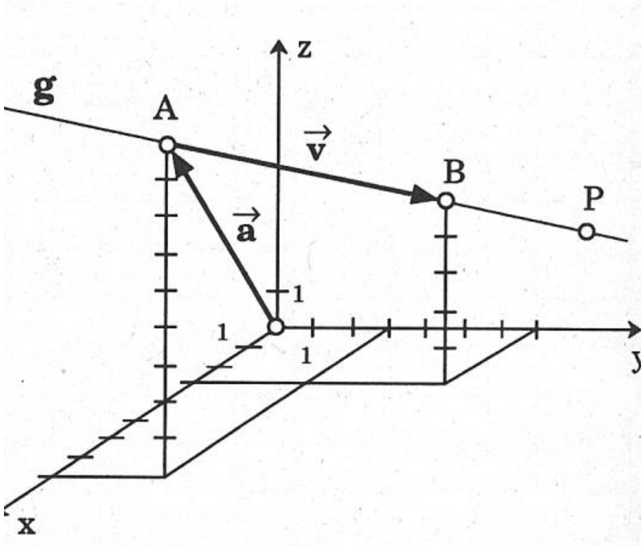
Au moment t=0 l'avion se situe à la position A, une minute plus tard à la position B. Le plan de vol est indiqué par la droite g.

On peut décrire la position de l'avion après t minutes avec le vecteur position $\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5t \\ 3+4t \\ 9-4t \end{pmatrix}$$

point général $\left(\underset{x}{8-5t} \;/\; \underset{y}{3+4t} \;/\; \underset{z}{9-4t} \right)$

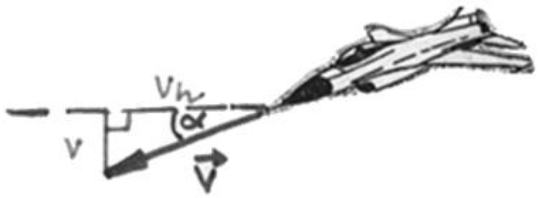


a) Calcule la position de l'avion après 5 minutes.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ \\ \end{pmatrix}$$

point général $\left(\underbrace{8-5\cdot(-5)}_{x} / \underbrace{3+4\cdot 5}_{y} / \underbrace{9-4\cdot 5}_{z} \right) = (-17 / \quad / \quad)$

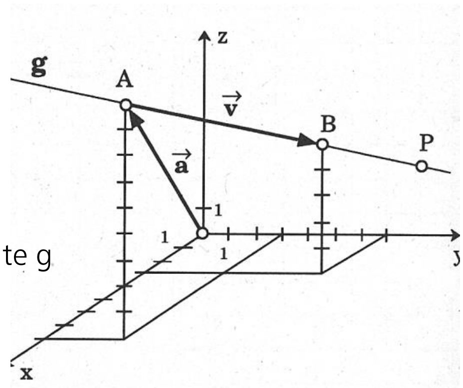
b) Calcule l'angle de dépression α (Tiefenwinkel), entre l'horizon et le plan de vol.(32°)



c) Détermine la position d'atterrissage.

Equation paramétrique d'une droite (Parameterform einer Geraden)

En connaissant deux points A et B on peut définir les vecteurs suivants



$\overrightarrow{OA}$ = vecteur position d'un point d'ancrage A sur la droite

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ = vecteur directeur entre les deux points A et B sur la droite g (Richtungsvektor, vecteur vitesse)

$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ = vecteur position d'un point général de la droite g

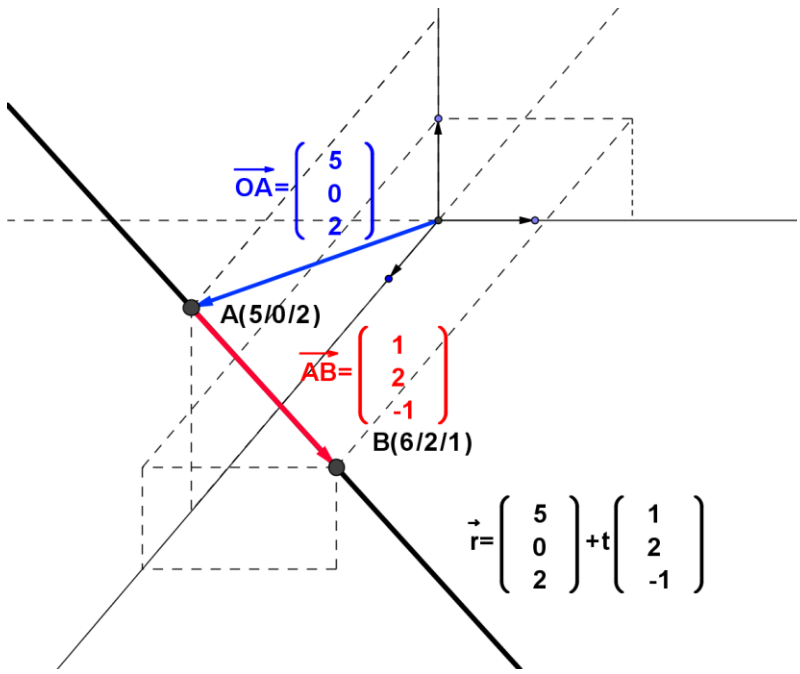
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \quad t \in \mathbb{R}$

Le vecteur de position d'un point de la droite est la somme du vecteur de position d'un point d'ancrage sur la droite avec un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. En multipliant ce vecteur directeur avec un nombre t on arrive à décrire la position de chaque point de la droite.

Pour chaque choix du paramètre t on reçoit un point spécifique de la droite. Dans nos exemples d'introduction le vecteur position était donné par la position initiale de l'avion, le vecteur directeur était la vitesse de l'avion et le paramètre t correspondait au temps t. Le paramètre t est un nombre réel, alors t peut aussi être négatif. Si on reprend notre idée de l'avion un paramètre t négatif signifie le passé.

Il existe une infinité d'équations pour une seule droite puisque la droite est composée d'une infinité de points qui peuvent servir comme point d'ancrage et comme vecteur directeur on peut prendre n'importe quel vecteur colinéaire au vecteur directeur.

Exemple : Calcule l'équation de la droite par les points A(5/0/2) et B(6/2/1



$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 2t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

Alors on peut décrire un point général de la droite avec

$$P(\underset{x}{5+t} / \underset{y}{2t} / \underset{z}{2-t})$$

On peut aussi décrire l'équation de la droite de cette même droite avec

$\vec{r} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BA}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$